

**Федеральное государственное автономное образовательное  
учреждение высшего образования  
«Московский физико-технический институт  
(национальный исследовательский университет)»**

**УТВЕРЖДЕНО**

**Проректор по учебной работе и  
довузовской подготовке**

**А.А. Воронов**

	<b>Рабочая программа дисциплины (модуля)</b>
<b>по дисциплине:</b>	Практикум по алгебре и геометрии
<b>по направлению:</b>	Прикладная математика и информатика
<b>профиль подготовки:</b>	Математика Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики кафедра высшей математики
<b>курс:</b>	1
<b>квалификация:</b>	бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 1 (осенний) - Зачет

Аудиторных часов: 30 всего, в том числе:

лекции: 0 час.

семинары: 30 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 15 час.

Всего часов: 45, всего зач. ед.: 1

Программу составил: И.И. Богданов, канд. физ.-мат. наук

Программа обсуждена на заседании кафедры высшей математики 21.05.2020

## Аннотация

Изучаются основы аналитической геометрии и линейной алгебры, а также смежных разделов алгебры. В начальной части курса, посвящённой аналитической геометрии, вводятся основы матричной алгебры. Изучаются маломерные векторные пространства (плоскость, пространство), метод координат в плоскости и пространстве, основы векторной алгебры. Изучается аналитическая геометрия прямых и плоскостей, а также линий второго порядка.

Далее изучаются базовые свойства основных алгебраических структур (группы, кольца, поля). Обсуждаются понятия характеристики поля, простейшие примеры групп, понятие смежного класса, теорема Лагранжа для групп.

Развивается теория систем линейных уравнений, основы теории линейных пространств (базис, размерность, суммы и пересечения подпространств, двойственное пространство и связанные понятия). Вводятся понятия линейных отображения и преобразования, ядра и образа. Обсуждается перевод всех этих понятий на матричный язык.

Развивается теория определителей матриц над произвольно полем.

Вводится и изучается понятие многочлена над полем. Освещаются вопросы разложения на множители, формальной производной, корней и кратных корней многочлена.

Развивается теория линейного преобразования (оператора) линейного пространства. Изучаются инвариантные подпространства, собственные значения и собственные векторы, характеристический многочлен, вопросы, связанные с диагонализуемостью оператора. Далее доказывается теорема Гамильтона–Кэли, изучается жорданова нормальная форма. Раздел завершается приложениями жордановой нормальной формы, включающими изучением линейных рекуррент над произвольным полем и связанных вопросов.

Вводятся понятия билинейной/полуторалинейной формы, (косо)симметрической билинейной формы (эрмитовой), квадратичной формы, изучаются вопросы приведения матрицы такой формы к каноническому виду.

Вводится и изучается понятие евклидова (эрмитова) пространства, связанные с ним понятия (длина, ортогональная проекция, объём).

Изучаются линейные операторы и квадратичные формы на евклидовых пространствах, их приведение к каноническому виду. Описываются полярное и сингулярное разложение матрицы.

В завершение курса, вводится общее понятие тензора (как обобщения многих введённых ранее понятий), описываются основные свойства тензоров и тензорные операции.

## 1. Цели и задачи

### Цель дисциплины

ознакомление слушателей с основами алгебры и геометрии и подготовка к изучению других математических курсов – дифференциальных уравнений, теории функций комплексного переменного, уравнений математической физики, функционального анализа, аналитической механики, теоретической физики, методов оптимального управления и др.

### Задачи дисциплины

приобретение слушателями теоретических знаний и практических умений и навыков в области матричной алгебры, теории линейных пространств, теории групп, аналитической геометрии;

подготовка слушателей к изучению смежных математических дисциплин;

приобретение навыков в применении методов аналитической геометрии и линейной алгебры в физике и других естественнонаучных дисциплинах.

## 2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-1 Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	УК-1.1 Анализирует задачу, выделяя этапы ее решения, действия по решению задачи
	УК-1.2 Находит, критически анализирует и выбирает информацию, необходимую для решения поставленной задачи

поставленных задач	УК-1.4 Грамотно, логично, аргументированно формирует собственные суждения и оценки
УК-6 Способен управлять своим временем, выстраивать и реализовывать траекторию саморазвития на основе принципов образования в течение всей жизни	УК-6.2 Способен планировать самостоятельную деятельность в решении профессиональных задач; подвергать критическому анализу проделанную работу; находить и творчески использовать имеющийся опыт в соответствии с задачами саморазвития

### 3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны

знать:

уравнения прямых линий, плоскостей, линий и поверхностей второго порядка;  
свойства линий второго порядка;  
понятие ранга оператора;  
операции с матрицами, методы вычисления ранга матрицы и детерминантов;  
координатную запись скалярного произведения.

уметь:

производить матричные вычисления, находить обратную матрицу, вычислять детерминанты;  
решать геометрические задачи методом координат, применять линейные преобразования к решению геометрических задач;  
производить матричные вычисления, находить обратную матрицу, вычислять детерминанты;  
находить численное решение системы линейных уравнений, исследовать системы линейных уравнений на совместность.

владеть:

общими понятиями и определениями, связанными с векторами: линейная независимость, базис, ориентация плоскости и пространства;  
ортогональной классификацией линий второго порядка;  
общими понятиями и определениями, связанными с матричной алгеброй;  
геометрической интерпретацией систем линейных уравнений и их решений;  
понятиями линейного пространства, матричной записью подпространств и отображений.

### 4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

#### 4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Линейное пространство над произвольным полем		6		3
2	Линии второго порядка		6		3
3	Матрицы и системы линейных уравнений		6		3
4	Основные определения теории групп, колец и полей		6		3
5	Предварительные теоремы теории групп		6		3
Итого часов			30		15
Подготовка к экзамену		0 час.			
Общая трудоёмкость		45 час., 1 зач.ед.			

## 4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 1 (Осенний)

### 1. Линейное пространство над произвольным полем

Линейные отображения и линейные преобразования линейного пространства. Операции над линейными преобразованиями. Обратное преобразование. Линейное пространство линейных отображений. Алгебра линейных преобразований.

### 2. Линии второго порядка

Координатное задание линий на плоскости, поверхностей в пространстве. Алгебраические линии и поверхности. Инвариантность порядка алгебраических линий на плоскости при замене декартовой системы координат. Координатное задание линий в пространстве. Инвариантность порядка алгебраических линий и поверхностей в пространстве при замене декартовой системы координат. Координатное задание фигур на плоскости и тел в пространстве.

Алгебраические линии 2-го порядка на плоскости. Их ортогональная классификация. Приведение уравнения линии 2-го порядка к каноническому виду. Центральные линии. Сопряженные диаметры. Асимптотические направления. Инварианты.

Эллипс, гипербола и парабола. Их свойства. Касательные к эллипсу, гиперболе и параболе. Уравнение эллипса, гиперболы и параболы в полярной системе координат.

### 3. Матрицы и системы линейных уравнений

Умножение и обращение матриц. Элементарные преобразования матриц. Матричная форма элементарных преобразований.

Определение и основные свойства детерминантов. Миноры, алгебраические дополнения, разложение детерминанта по элементам строки или столбца. Формула полного разложения детерминанта и ее следствия. Детерминант произведения матриц.

Решение систем линейных уравнений по методу Крамера. Ранг матрицы. Теорема о базисном миноре. Теорема о ранге матрицы.

Изменение координат при изменении базиса в линейном пространстве. Матрица перехода и ее свойства. Координатная форма задания подпространств и гиперплоскостей.

Матрицы линейного отображения и линейного преобразования для конечномерных пространств. Операции над линейными преобразованиями в координатной форме. Изменение матрицы линейного отображения при замене базисов. Изоморфизм пространства линейных отображений и пространства матриц.

### 4. Основные определения теории групп, колец и полей

Мощность конечного векторного пространства и конечного поля. Количество базисов и подпространств конечного линейного пространства.

### 5. Предварительные теоремы теории групп

Понятие группы, кольца и поля. Порядок элемента. Циклические группы, их подгруппы. Теорема Лагранжа и ее следствия. Характеристика поля.

## 5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

Учебная аудитория, оснащенная компьютером и мультимедийным оборудованием (проектор, звуковая система).

## 6. Перечень рекомендуемой литературы

#### Основная литература

1. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры [Текст] : учебник для вузов / Д. В. Беклемишев .— 10-е изд., испр. — М. : Физматлит, 2003, 2004, 2005 .— 304 с.
2. Введение в алгебру [Текст] : в 3 ч. : учебник для вузов / А. И. Кострикин .— М. : МЦНМО, 2012 .— Ч. 1 : Основы алгебры. - 2012. - 272 с.
3. Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре [Текст] : учеб. пособие для вузов / Л. А. Беклемишева, А. Ю. Петрович, И. А. Чубаров ; под ред. Д. В. Беклемишева .— 2-е изд., перераб. — М. : Физматлит : Лаб. базовых знаний, 2003, 2004, 2006, 2012, 2014 .— 496 с.

#### Дополнительная литература

1. Аналитическая геометрия и линейная алгебра [Текст] : в 2 ч. : учеб. пособие для вузов. Ч. 1 / А. Е. Умнов ; М-во образования и науки Рос. Федерации, Моск. физико-техн. ин-т (гос. ун-т) .— 2-е изд., испр. и доп. — М. : Изд-во МФТИ, 2006 .— 272 с.
2. Аналитическая геометрия и линейная алгебра [Текст] : в 2 ч. : учеб. пособие для вузов. Ч. 2 / А. Е. Умнов ; М-во образования и науки Рос. Федерации, Моск. физико-техн. ин-т (гос. ун-т) .— 2-е изд., испр. и доп. — М. : Изд-во МФТИ, 2006 .— 298 с.
3. Лекции по аналитической геометрии и линейной алгебре [Текст] : учеб. пособ. ; рек. Уч.-метод. сов. МФТИ / В. И. Чехлов ; М-во образования РФ, Моск. физ.-техн. ин-т (гос. ун-т) .— М : МФТИ, 2000 .— 260 с.

#### **7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)**

<http://www.math.mipt.ru>  
<http://lib.mipt.ru>

#### **8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)**

На практических занятиях используются мультимедийные технологии, включая демонстрацию презентаций.

#### **9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)**

Приведены в ежегодно разрабатываемых домашних заданиях.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

### ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

**по направлению:** Прикладная математика и информатика  
**профиль подготовки:** Математика  
Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики  
кафедра высшей математики  
**курс:** 1  
**квалификация:** бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 1 (осенний) - Зачет

**Разработчик:** И.И. Богданов, канд. физ.-мат. наук

## 1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-1 Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	УК-1.1 Анализирует задачу, выделяя этапы ее решения, действия по решению задачи
	УК-1.2 Находит, критически анализирует и выбирает информацию, необходимую для решения поставленной задачи
	УК-1.4 Грамотно, логично, аргументированно формирует собственные суждения и оценки
УК-6 Способен управлять своим временем, выстраивать и реализовывать траекторию саморазвития на основе принципов образования в течение всей жизни	УК-6.2 Способен планировать самостоятельную деятельность в решении профессиональных задач; подвергать критическому анализу проделанную работу; находить и творчески использовать имеющийся опыт в соответствии с задачами саморазвития

## 2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Практикум по алгебре и геометрии» обучающийся должен:

### знать:

уравнения прямых линий, плоскостей, линий и поверхностей второго порядка;  
свойства линий второго порядка;  
понятие ранга оператора;  
операции с матрицами, методы вычисления ранга матрицы и детерминантов;  
координатную запись скалярного произведения.

### уметь:

производить матричные вычисления, находить обратную матрицу, вычислять детерминанты;  
решать геометрические задачи методом координат, применять линейные преобразования к решению геометрических задач;  
производить матричные вычисления, находить обратную матрицу, вычислять детерминанты;  
находить численное решение системы линейных уравнений, исследовать системы линейных уравнений на совместность.

### владеть:

общими понятиями и определениями, связанными с векторами: линейная независимость, базис, ориентация плоскости и пространства;  
ортогональной классификацией линий второго порядка;  
общими понятиями и определениями, связанными с матричной алгеброй;  
геометрической интерпретацией систем линейных уравнений и их решений;  
понятиями линейного пространства, матричной записью подпространств и отображений.

## 3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

Текущий контроль осуществляется на основе выполнения студентами совокупности домашних заданий и контрольных работ в соответствии с учебным планом. Данные о посещаемости и текущей успеваемости вносятся преподавателями в специальные журналы.

Текущий контроль на основе домашних заданий осуществляется в течение учебного семестра в сроки, установленные Учебным управлением, в соответствии с учебным планом.

Для сдачи задания студент обязан предоставить решение задачи домашнего задания в письменной форме, ответить на вопросы преподавателя и написать контрольную работу по заданию, по которой проверяются знание понятий и утверждений по темам сдаваемого задания и умение решать задачи.

Во время выполнения контрольной работы нельзя пользоваться помощью других лиц, вычислительной техники и мобильными телефонами.

## 4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся

Примеры контрольных вопросов для зачета:

1. Сформулируйте основную теорему алгебры. Верна ли она для поля вещественных чисел?
2. Сформулируйте теорему об инвариантных пространствах. Всегда ли существуют инвариантные подпространства?
3. Является ли минимальный многочлен делителем характеристического?
4. Как связаны между собой кратность корня характеристического многочлена линейного преобразования и размерность соответствующего собственного подпространства? Приведите пример, когда они различны.
5. Какой вид имеет матрица линейного преобразования в базисе  $e_1, \dots, e_n$ , если  $e_1, \dots, e_n$  ( $k < n$ ) образуют базис в инвариантном подпространстве данного пространства?
6. Докажите, что характеристический многочлен матрицы линейного преобразования не меняется при изменении базиса. Верно ли это для матрицы квадратичной формы?
7. Докажите, что при переходе от одного ортонормированного базиса в евклидовом пространстве к другому определитель матрицы квадратичной формы не меняется.
8. Какие значения может принимать определитель ортогональной матрицы? Верно ли, что если определитель матрицы по модулю равен 1, то она ортогональна?
9. Что такое положительно (отрицательно) определенная квадратичная форма? Сформулируйте критерий Сильвестра для положительно определенных квадратичных форм и его аналог для отрицательно определенных квадратичных форм.
10. Сформулируйте свойства собственных значений самосопряженного и ортогонального преобразований. Докажите, что собственные векторы этих преобразований, соответствующие различным собственным значениям, ортогональны.

#### Критерии оценивания

Оценка «отлично (10)» выставляется обучающемуся, если он показал всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений;

оценка «отлично (9)» выставляется обучающемуся, если он показал всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений, но при этом были допущены небольшие неточности, которые были самостоятельно обнаружены и исправлены;

оценка «отлично (8)» выставляется обучающемуся, если он показал всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений, но при этом были допущены небольшие неточности, которые после указания экзаменатора были самостоятельно исправлены;

оценка «хорошо (7)» выставляется обучающемуся, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает неточности в ответе или делает несущественные ошибки при решении задач;

оценка «хорошо (6)» выставляется обучающемуся, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает небольшие ошибки в ответе и (или) при решении задач;

оценка «хорошо (5)» выставляется обучающемуся, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но отвечает неуверенно и (или) допускает ошибки при решении задач;

оценка «удовлетворительно (4)» выставляется обучающемуся, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, неточные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, если при этом он владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;

оценка «удовлетворительно (3)» выставляется обучающемуся, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, неточные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, не владеющему некоторыми разделами учебной программы, но умеющему применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;

оценка «неудовлетворительно (2)» выставляется обучающемуся, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных понятий дисциплины и не умеет использовать полученные знания при решении типовых практических задач;

оценка «неудовлетворительно (1)» выставляется обучающемуся, показавшему полное незнание учебной программы дисциплины.

## **5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности**

При проведении зачета обучающемуся предоставляется 1 астрономический час на подготовку. Опрос обучающегося по билету на устном экзамене не должен превышать двух астрономических часов.

Во время проведения экзамена обучающиеся могут пользоваться только программой дисциплины.